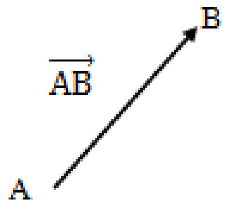
Тема 11. Векторы и действия с ними

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец.



В данном случае началом отрезка является точка A, концом отрезка – точка B. Сам вектор обозначен через $\overline{AB}$. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор $\overline{BA}$, и это уже **совершенно другой вектор**. Понятие вектора удобно отождествлять с движением физического тела: согласитесь, зайти в двери института или выйти из дверей института – это совершенно разные вещи.

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* $\bar{0}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

1. Нахождение модуля вектора a = (x,y,z): $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

а) Нахождение координат вектора $\overrightarrow{AB}$ по двум точкам А (x_a, y_a, z_a) и В ($x_в, y_в, z_в$): $\overrightarrow{AB}$ ($x_в - x_a$, $y_в - y_a$, $z_в - z_a$).

3. Если С– середина отрезка АВ, то

$$x_c = \frac{x_a + y_в}{2}, \quad y_c = \frac{y_a + y_в}{2}, \quad z_c = \frac{z_a + z_b}{2}.$$

4. Проекция вектора на ось: пр$_l$ АВ=$|AB|\cos\varphi$, где φ – угол между вектором АВ и ось l.

5. Направляющие косинусы вектора. Пусть α, β, γ – углы, которые образует вектор $\vec{a}$ =(x,y,z) с координатными осями. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведение модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\left(\vec{a}, \vec{в}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{в}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Скалярное произведение обладает свойствами:

1) переместительным $\left(\vec{a}, \vec{в}\right) = (\vec{в}, \vec{a})$;
2) сочетательным $(\alpha, \vec{a})\vec{в} = \alpha(\vec{a}, \vec{в})$;
3) распределительным $\vec{a}(\vec{в}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{в}) + (\vec{a}, \vec{c})$;
4) скалярным квадратом $(\vec{a}, \vec{a}) = |a|^2$;

5) если векторы перпендикулярны, то $\left(\vec{a}, \vec{в}\right) = 0$.

Если даны векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то их скалярное произведение можно вычислить по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Углом между двумя векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называют угол φ (0≤φ≤ π), определяемый из уравнения

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{в})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{в}|}.$$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|c| = |a| \cdot |в| \sin\varphi$;

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости параллелограмма, построенного на векторах **а** и **в** как на сторонах;

в) направлен так, что кратчайшее вращение вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ мы наблюдаем с конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки (говорят также, что $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая связка).

Векторное произведение обозначают $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{в}\right]$

Векторное произведение двух векторов обладает свойствами:

1) $[\vec{a}, \vec{в}] = -[\vec{в}, \vec{a}]$;

2) $[\alpha\vec{a}, \vec{в}] = \alpha[\vec{a}, \vec{в}]$;

3) $[\vec{a} + \vec{в}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{в}, \vec{c}]$;

4) если векторы коллинеарны, то $[\vec{a}, \vec{в}] = 0$.

Если $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{в}\right]$ можно вычислить по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, направленные соответственно по осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 (естественный базис в R^3).

Площадь треугольника ABC определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left\|[AB, AC]\right\|.$$

Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор и обозначается: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Смешанное произведение обладает свойствами:

1) если поменять местами два вектора, то смешанное произведение изменит знак;
2) ели векторы менять в круговом порядке, то смешанное произведение не изменится;
3) если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

Смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Абсолютная величина смешанного произведения трех векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$V = \left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$$

. Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен $V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$

Пример 1. Даны вершины треугольника A(1,–2,4); B (–1,2,0); C(3,–2,1). Найти: а) внутренний угол при вершине B; б) пр $_{вс}$ (AB – 2AC).

Решение:

а) Составим векторы BA = (2, –4, 4), BC = (4, –4, 1), тогда используя формулу (7), получим

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 4 + (-4)(-4) + 1\cdot 4}{\sqrt{4+16+16}\cdot\sqrt{16+16+1}} = \frac{28}{6\cdot\sqrt{33}} = \frac{14}{3\sqrt{33}}, \quad \angle B = \arccos\frac{14}{3\sqrt{33}}.$$

б) AB – 2AC = (–2, 4, –4) – 2(2, 0, –3) = (–6, 4, 2). Следовательно,

пр $_{вс}$ (AB –2AC) = $\dfrac{4(-6) + 4\cdot(-4) + 2\cdot 1}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{33}} = \dfrac{-38}{2\sqrt{462}} = \dfrac{-19}{\sqrt{462}}.$

Пример 2. Даны координаты вершин пирамиды АВСД:
А(0;–1;2), В(1;–2;3), С(–1;2;–1), Д(4;1;2). Найти:

1) площадь основания АВС;
2) объем пирамиды.

Решение:

1. Вычислим векторное произведение $[AB, AC]$, для этого находим векторы: AB = $\{1-0; -2-(-1); 3-2\}$ = $\{1; -1; 1\}$,

AC = $\{-1-0; 2-(-1); -1-2\} = \{-1; 3; -3\}$.

$[AB, AC]$ = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ = 2j + 2k;

S = $\frac{1}{2}\left|[AB, AC]\right|$ = $\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}.$

2. Найдем вектор АД = {4; −2; 0} и смешанное произведение (АВ,АС,АД):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4$$;

V = $\frac{1}{6}\left|-4\right| = \frac{2}{3}.$

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется вектором и модулем вектора?
2. Выведите формулу деления отрезка в данном отношении.
3. Что называется скалярным произведением двух векторов, какие его свойства?
4. Выведите формулы для длины вектора, угла между двумя векторами и расстояния между двумя точками в декартовой системе координат.
5. Как выражаются координаты вектора через координаты его начальной и конечной точек.
6. Что называется векторным произведением двух векторов, какие его свойства?
7. Что называется смешанным произведением трех векторов, двух векторов, каковы его свойства?